习题课 Green公式 Gauss公式 Stokes公式

一．Green定理的应用。

1. 计算线积分，其中为，逆时针为正向。
2. 设为有界开区域，它的边界是逐段光滑曲线，是的外单位法向量，设函数，且在内为调和函数，即，。求证：

(i) ；

(ii) ；

(iii) 若在边界上，，求证， 。

1. 已知函数在整个实轴上二次连续可微，满足，且使得微分式

是全微分，求，并使由到逐段光滑曲线上积分的值为。

1. 设是实轴上处处为正的连续函数，为圆心在原点的单位开圆盘。

证明：(i)；

(ii)。

1. 设, 在上连续，在内存在连续偏导数．．若在上满足方程 ．为有向曲线的外单位法向量，求极限 。
2. 计算积分：,

路径为沿任一条不与轴相交的曲线。

1. 设在上半平面内，函数具有连续偏导数,且对任意的都有，证明: 对L内的任意分段光滑的有向简单闭曲线L,都有。

二．Gauss公式

1. 设为由圆锥面:和平面所围成的圆锥体。

(i) 证明设此圆锥体的体积可以表示为，其中为区域的边界曲面，为其单位外法向量，．

(ii) 圆锥体的体积也可以表示为 ，其中为圆锥的底面积，为圆锥的高．

1. 设一元函数在上连续可导,且对于任何位于半空间中

的光滑有向封闭曲面，有。进一步假设。求。

三．Stokes公式

1. 利用Stokes公式计算积分, 其中为圆周



从Ox轴的正向看去, 圆周的正向为逆时针方向.

1. 设有向曲线是平面与球面的交线，从轴正向看去为逆时针为正向。求第二类曲线积分。
2. 计算高斯积分，其中为一个不经过原点的光滑封闭曲面，其中为上点处的单位外法线向量，，．
3. （P.230,10）